I.S. SOMINSKII

# MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

I. S. SOMINSKI

# MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Traducido del ruso por Carlos Vega,
Candidato a Doctor en ciencias
físico-matemáticas

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

# INTRODUCCIÓN

Existen proposiciones generales y particulares.

Son proposiciones generales, por ejemplo, las siguientes.

*Todos* los ciudadanos de la URSS tienen derecho a la enseñanza.

*En todo* paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.

*Todos* los números que terminan en cero son divisibles por 5.

Las proposiciones particulares correspondientes son:

Petrov tiene derecho a la enseñanza.

Las diagonales del paralelogramo *ABCD* se cortan en el punto medio de ambas.

140 es divisible por 5.

El paso de las proposiciones generales a las particulares se denomina *deducción*. Veamos un ejemplo.

Todos los ciudadanos de la URSS tienen derecho a la enseñanza. (1)

Petrov es ciudadano de la URSS. (2)

Petrov tiene derecho a la enseñanza. (3)

La proposición particular (3) ha sido deducida de la proposición general (1) mediante la proposición (2).

El paso de las proposiciones particulares a las generales se denomina *inducción*. La inducción puede llevar a conclusiones justas y a conclusiones falsas. Aclaremos esto con dos ejemplos.

140 es divisible por 5. (1)

Todos los números que terminan en cero son divisibles por 5. (2)

De la proposición particular (1) hemos obtenido la proposición general (2) que es justa.

140 es divisible por 5. (1)

Todos los números de tres dígitos son divisibles por 5. (2)

De la proposición particular (1) hemos obtenido la proposición general (2) que es falsa.

¿Cómo debe emplearse la inducción en las Matemáticas[1] para llegar siempre a conclusiones justas? La respuesta viene en este libro.

**1.** Veamos primero dos ejemplos de inducción *inadmisible* en las Matemáticas.

**Ejemplo 1.** Sea

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es fácil ver que

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Sobre la base de los resultados obtenidos afirmamos que para *todo* número natural $n$ se tiene

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

**Ejemplo 2.** Consideremos el trinomio $x^2+x+41$ estudiado ya por *L. Euler*. Tomando el cero en lugar de $x$, obtenemos el número *primo* 41. Tomando ahora en este mismo trinomio el uno en lugar de $x$, obtenemos de nuevo un número *primo*, el 43. Tomando en el trinomio sucesivamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en lugar de $x$, obtenemos *cada vez un número primo* (47, 53, 61, 71, 83, 97, 113,

[1] Véase el epílogo (páginas 47—51).

131 y 151, respectivamente). De aquí inferimos que al su s tituir $x$ en el trinomio por un número entero no negativo *cualquiera siempre* se obtiene un número *primo* como resultado.

¿Por qué son inadmisibles en las Matemáticas los razonamientos empleados en estos ejemplos? ¿De qué *adolecen* los razonamientos realizados?

Ambas veces hemos enunciado *una proposición general* para *todo* $n$ (para todo $x$, en el segundo ejemplo) basándonos sólo en que esta proposición ha resultado justa para *algunos* valores de $n$ (o de $x$).

La inducción se emplea ampliamente en las Matemáticas, pero hay que hacerlo con entendimiento[1]; la ligereza puede conduci a conclusiones falsas.

Así, aunque en el ejemplo 1 la proposición general enunciada resulta casualmente justa (como se demuestra en el ejemplo 4), la proposición general del ejemplo 2 es falsa.

Efectivamente, analizando con mayor atención el trinomio $x^2+x+41$, nos persuadimos de que es igual a un número primo para $x=0, 1, 2, \ldots, 39$, pero que para $x=40$ este trinomio vale $41^2$, o sea, un número compuesto[2].

2. En el ejemplo 2 nos hemos encontrado con una proposición que, siendo válida en 40 casos particulares, no lo es en general.

Daremos otros ejemplos de proposiciones justas en varios casos particulares, pero no en general.

**Ejemplo 3.** El binomio $x^n-1$, donde $n$ es un número natural, tiene gran interés para los matemáticos. Bastará decir que está ligado estrechamente al problema geométrico sobre la división de la circunferencia en $n$ partes iguales. No tiene nada de extraño, por consiguiente, que este binomio haya sido estudiado profundamente. En particular, los matemáticos se han interesado por la descomposición de este binomio en coeficientes de factores enteros.

Analizando las descomposiciones correspondientes a varios particulares de $n$, los matemáticos observaron que los valores absolutos de todos los coeficientes de estas descomposiciones no pasan del uno. En efecto,

[1] Véase el epílogo (páginas 47—51).

[2] Y salta en seguida a la vista que siendo $x=41$ el número $x^2+x+41=41^2+41+41$ es divisible por 41.

$$x-1=x-1,$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1).$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Fueron compuestas tablas dentro de cuyos límites los coeficientes poseían esta propiedad. Pero los intentos de demostrar este hecho para todo $n$ fracasaron.

En 1938 apareció en la revista «Успехи математических наук» (Logros de las ciencias matemáticas, fascículo IV) un pequeño artículo de *N. G. Chebotariov*, destacado matemático soviético, proponiendo a nuestros matemáticos estudiar esta cuestión.

El problema fue resuelto por *V. K. Ivanov*[1]. Resultó que esta propiedad la tienen todos los binomios $x^n-1$ de grado menor que 105; pero uno de los factores de $x^{105}-1$ es el polinomio

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+$$
$$+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-$$
$$-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-$$
$$-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1$$

que no verifica dicha propiedad.

**Ejemplo 4.** Consideremos los números de tipo $2^{2^n}+1$. Para $n=0$, 1, 2, 3 y 4 los números $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$ y $2^{2^4}+1=65\,537$ son primos. P. de Fermat, ilustre matemático francés del siglo XVII, aceptaba que *todos* los números de este tipo son primos. Sin embargo, *L. Euler* encontró, ya en el siglo XVIII, que

$$2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417$$

es un número compuesto.

[1] «Успехи математических наук» (Logros de las ciencias matemáticas), 1941, fascículo IV, páginas 313—317.

**Ejemplo 5.** *G. W. Leibniz*, eminente matemático alemán del siglo XVII y uno de los fundadores de las «Matemáticas superiores», demostró que cualquiera que sea el entero positivo $n$ el número $n^3-n$ es divisible por 3, el número $n^5-n$ es divisible por 5 y el número $n^7-n$ es divisible por 7. De aquí supuso que para todo $k$ impar y cualquier $n$ natural el número $n^k-n$ es divisible por $k$, pero pronto observó que $2^9-2=510$ *no es divisible* por 9.

**Ejemplo 6.** Un error del mismo carácter cometió *D. A. Grave*, conocido matemático soviético, al suponer que para todo primo $p$ el número $2^{p-1}-1$ no es divisible por $p^2$. El cálculo directo confirmaba esta hipótesis para todos los números $p$ *menores que mil*. Sin embargo, pronto se comprobó que $2^{1092}-1$ es divisible por $1093^2$ (1093 es un número primo); o sea, la hipótesis de Grave resultó errónea.

**Ejemplo 7.** ¿En cuántas partes dividen el espacio $n$ planos pasando todos por un mismo punto sin que pasen nunca tres por una misma recta?

Consideremos algunos casos particulares elementales de este problema. Un plano divide el espacio en dos partes. Dos planos, con un punto común, dividen el espacio en cuatro partes. Tres planos que pasan por un mismo punto, pero no tienen recta común, dividen el espacio en ocho partes.

A primera vista parece que, al aumentar en uno el número de planos, la cantidad de partes en que queda dividido el espacio se duplica y, por consiguiente, cuatro planos lo dividen en 16 partes, cinco lo dividen en 32 partes y, en general, $n$ planos dividen el espacio en $2^n$ partes.

Pero la realidad es distinta: cuatro planos dividen el espacio en 14 partes y cinco planos lo dividen en 22 partes. Se puede demostrar[1] que $n$ planos dividen el espacio en $n(n-1)+2$ partes.

**Ejemplo 8.** Veamos otro ejemplo de carácter muy instructivo. Tomando en lugar de $n$ en la expresión $991n^2+1$ sucesivamente los números enteros 1, 2, 3, ... jamás obtendremos el cuadrado de un número por muchos días o incluso años que dediquemos a ello. Sin embargo, sería erróneo deducir de aquí que ningún número de este tipo es un cuadrado. En efecto, entre los números de tipo $991n^2+1$

[1] La solución viene en el ejemplo 13 (página 29).

también hay cuadrados; pero es muy grande el valor mínimo de $n$ para el cual es un cuadrado el número $991n^2+1$. He aquí este valor:

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Los ejemplos considerados permiten hacer una conclusión sencilla y al mismo tiempo importante.

*Una proposición puede ser válida en una serie de casos particulares y no serlo en general.*

3. Ahora surge otra pregunta. Se tiene una proposición válida en varios casos particulares y es imposible analizar todos los casos. ¿Cuándo se puede afirmar que esta proposición es válida en general?

A veces la respuesta se logra aplicando un razonamiento especial conocido como *método de inducción matemática* (completa o perfecta).

Este método se basa en el *principio de inducción matemática* que consiste en lo siguiente.

*Una proposición es válida para todo número natural $n$ si: 1) es válida para $n=1$ y 2) de su validez para un número natural cualquiera $n=k$ se desprende su validez para $n=k+1$.*

Demostración[1]. Supongamos lo contrario, o sea, que la proposición no es válida para cualquier número natural $n$. Entonces existe un número natural $m$ tal que 1) para $n=m$ la proposición es falsa y 2) para todo $n$ menor que $m$ la proposición es justa (en otras palabras, $m$ es el primer número natural para el cual resulta falsa la proposición).

Es evidente que $m>1$ pues para $n=1$ la proposición es justa (condición 1). Por consiguiente, $m-1$ es un número natural. Pero entonces la proposición es válida para el

[1] El lector puede omitir el texto que sigue hasta el punto 4 sin perjuicio para la comprensión del material posterior, pues *el principio del número mínimo*—que se menciona a continuación y en el que se basa la demostración del principio de inducción matemática—no es más (ni tampoco menos) evidente que el propio principio de inducción matemática. Por otra parte, un estudio más profundo permite ver que ambos principios son equivalentes sólo si se aceptan condiciones complementarias. Por eso, podemos considerar el principio de inducción matemática como una hipótesis intuitivamente muy convincente tomándola como un *axioma* que determina la sucesión de los números naturales. Para mayores detalles véase el epílogo y la literatura en él mencionada.

número *natural* $m-1$ y no lo es para el número natural siguiente $m$. Esto contradice la condición 2.

Para demostrar el principio de inducción matemática nos hemos valido, como se ve, *de que cualquier conjunto de números naturales contiene el número mínimo*. Se puede demostrar que esta propiedad es, a su vez, un corolario del principio de inducción matemática. Por lo tanto, ambas proposiciones son equivalentes y cualquiera de ellas se puede tomar como un axioma que define la sucesión de los números naturales; entonces la otra será un teorema. Suele tomarse como axioma precisamente el principio de inducción matemática.

**4.** Toda demostración que se basa en el principio de inducción matemática se denomina demostración *por inducción (por el método de inducción matemática)*. Tal demostración consta necesariamente de dos partes, o sea, de la demostración de dos teoremas:

Teorema 1. *La proposición es válida para* $n=1$.

Teorema 2. *La proposición es válida para* $n=k+1$ *si lo es para* $n=k$, *donde* $k$ *es un número natural arbitrario.*

Si *ambos* teoremas han sido demostrados, podemos afirmar, en virtud del principio de inducción matemática, que la proposición es válida para todo número natural $n$.

**Ejemplo 9.** Calcúlese la suma (véase el ejemplo 1)

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Sabemos ya que

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{3}{4}\ \text{y}\ S_4=\frac{4}{5}.$$

Ahora no repitiremos el error cometido en el ejemplo 1 afirmando de inmediato que para todo número natural $n$ es

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

Seamos prudentes y digamos que el análisis de las sumas $S_1$, $S_2$, $S_3$ y $S_4$ sugiere la hipótesis de que $S_n=\frac{n}{n+1}$ para todo número natural $n$. Sabemos que la hipótesis se cumple para $n=1$, 2, 3 y 4. Para comprobarla recurriremos al método de inducción matemática.

Teorema 1. Para $n=1$ la hipótesis se cumple pues $S_1=\frac{1}{2}$.

Teorema 2. Supongamos que la hipótesis es válida para $n=k$, o sea, que

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

donde $k$ es un número natural. Demostremos que, entonces, la hipótesis es válida también para $n=k+1$, o sea, que

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)};$$

por consiguiente, según la hipótesis del teorema,

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Hemos demostrado ambos teoremas. Ahora podemos *afirmar*, basándonos en el principio de inducción matemática, que

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

para *todo* número natural $n$.

Observación 1. Es necesario subrayar que la demostración por inducción exige incondicionalmente la demostración de *ambos teoremas* 1 y 2.

Hemos visto a qué conduce despreciar el teorema 2 (ejemplo 2).

Ahora mostraremos que tampoco se puede omitir el teorema 1. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 10.** Teorema. *Todo número natural es igual al número natural siguiente.*

Apliquemos para la demostración el método de inducción matemática. Supongamos que

$$k=k+1 \tag{1}$$

y demostremos que

$$k+1=k+2. \tag{2}$$

En efecto, agregando 1 a ambos miembros de la igualdad (1), obtenemos la igualdad (2). Resulta, pues, que si la proposición es válida para $n=k$, también lo es para $n=k+1$. Hemos demostrado el teorema.

Corolario. Todos los números naturales son iguales.

¿Dónde radica el *error*? Consiste en que el primer teorema, necesario para poder aplicar el principio de inducción matemática, no ha sido demostrado (ni puede ser demostrado) y sólo ha sido demostrado el segundo teorema.

Cada uno de los teoremas 1 y 2 desempeña su papel. El teorema 1 crea, hablando figuralmente, la base de la inducción. El teorema 2 permite *ampliar* automática e indefinidamente esta base *pasando* de un caso particular al siguiente, o sea, de $n$ a $n+1$.

Si no ha sido demostrado el teorema 1, pero ha sido demostrado el teorema 2 (ejemplo 6), no se ha creado la base de la inducción y no tiene sentido aplicar el teorema 2, pues nada hay que ampliar.

Si no ha sido demostrado el teorema 2, pero ha sido demostrado el teorema 1 (ejemplos 1 y 2), existe la base de la inducción pero no tenemos derecho de ampliarla.

Observación 2. Hemos explicado el método de inducción matemática en el caso más sencillo. En situaciones más complejas habrá que modificar respectivamente los enunciados de los teoremas 1 y 2.

A veces, la segunda parte de la demostración se basa en que la proposición es válida no sólo para $n=k$ sino también para $n=k-1$. En tal caso la proposición de la primera parte debe comprobarse para *dos* valores sucesivos de $n$. Más adelante el lector encontrará ejemplos de este tipo (ejemplo 7, página 23).

A veces, en la segunda parte se demuestra la proposición para un valor de $n$ suponiéndose su validez para *todos* los números naturales $k$ *menores* que $n$.

A veces, la proposición se demuestra para todo número entero $n$ mayor que un número entero $m$[1] (y no para cualquier número natural). En este caso la primera parte debe consistir en demostrar la proposición para $n=m+1$ y, si es necesario, para algunos otros valores de $n$.

---

[1] Por ejemplo, toda proposición relacionada con los polígonos de $n$ lados tiene sentido sólo para $n \geqslant 3$.

5. Volvamos al ejemplo 1 para dejar constancia de un momento importante en el método de inducción matemática.

Analizando la suma

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

para distintos valores de $n$, hemos visto que

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{3}{4} \text{ y } S_4 = \frac{4}{5},$$

por donde hemos llegado a la hipótesis de que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n$ comprobándola después mediante el método de inducción matemática.

Hemos tenido la suerte de enunciar una hipótesis que efectivamente es justa. Si no hubiésemos acertado en la hipótesis, su falsedad quedaría manifiesta al demostrar el teorema 2.

**Ejemplo 11.** Consideremos las sumas

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Supongamos que, analizando $S_n$, hemos llegado a la hipó tesis de que

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1}. \qquad (1)$$

La fórmula (1) es válida para $n=1$ ya que $S_1 = \frac{1}{2}$. Supongamos que es válida para $n=k$, o sea, que

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1},$$

y tratemos de demostrar que también es válida para $n = k+1$, o sea, que

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}.$$

Tenemos

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^3+4k^2+8k+2}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

o sea, un resultado distinto al que queríamos encontrar.

Es decir, de la validez de la fórmula (1) para $n=k$ *no se deduce* su validez para $n=k+1$. Queda claro que la fórmula (1) es falsa.

Por lo tanto, *el método de inducción matemática permite determinar la ley general ensayando las hipótesis que surgen, rechazando las falsas y llegando a la justa.*

Para llegar a dominar el método de inducción matemática es preciso considerar un número suficiente de problemas.

Para no repetir constantemente las palabras «Teorema 1» y «Teorema 2», convendremos en indicar por 1° y 2° la primera y la segunda parte de la inducción (por su contenido, estas partes corresponden precisamente a los dos teoremas cuya demostración equivale a emplear el método de inducción matemática). Además, haremos diferencia entre *ejemplos*, acompañados de solución detallada, y *problemas*, destinados al trabajo individual del lector. Al final del libro damos la solución de todos los problemas insertados en el texto.

## § 1
## DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES; PROBLEMAS ARITMÉTICOS

**Ejemplo 1.** Consideremos los números impares positivos tomados en orden de crecimiento: 1, 3, 5, 7, ... Indiquemos el primero con $u_1$, el segundo con $u_2$, el tercero con $u_3$, etc., es decir, pongamos

$$u_1=1,\quad u_2=3,\quad u_3=5,\quad u_4=7,\ \ldots$$

Planteémonos el problema siguiente: hallar la fórmula que vincula el número impar $u_n$ y su índice $n$.

Solución. Podemos expresar el primer número impar así:

$$u_1=2\cdot 1-1; \tag{1}$$

podemos expresar el segundo número impar así:

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1; \qquad (2)$$

podemos expresar el tercer número impar así:

$$u_3 = 3 \cdot 2 - 1. \qquad (3)$$

Analizando con atención las igualdades (1), (2) y (3), podemos enunciar la siguiente hipótesis: para obtener cualquier número impar $u_n$ basta duplicar su índice y restar 1; es decir, para cualquier $n$-ésimo número impar se tiene

$$u_n = 2n - 1. \qquad (4)$$

Demostremos que esta fórmula es justa.

1°. La igualdad (1) significa que la fórmula (4) es válida para $n = 1$.

2°. Supongamos que la fórmula (4) se cumple para $n = k$, o sea, que para el $k$-ésimo número impar se tiene

$$u_k = 2k - 1.$$

Demostremos que, entonces, la fórmula (4) debe ser también válida para el $(k+1)$-ésimo número impar, o sea, que el $(k+1)$-ésimo número impar es de la forma

$$u_{k+1} = 2(k+1) - 1$$

o, lo que es lo mismo,

$$u_{k+1} = 2k + 1.$$

Para obtener el $(k+1)$-ésimo número impar basta agregar 2 al $k$-ésimo número impar:

$$u_{k+1} = u_k + 2.$$

Pero, por hipótesis, $u_k = 2k - 1$ de modo que

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k + 1$$

como queríamos demostrar.

*Respuesta.* $u_n = 2n - 1$.

**Ejemplo 2.** Calcúlese la suma de los $n$ primeros números impares.

Solución. Indiquemos por $S_n$ la suma buscada:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Para problemas de este tipo los matemáticos disponen de fórmulas hechas. Nos interesa resolver este problema sin recurrir a dichas fórmulas, empleando el método de inducción matemática. Para ello debemos elaborar la hipótesis, o sea, adivinar la respuesta.

Con este fin, tomamos para $n$ sucesivamente los valores 1, 2, 3, ... hasta obtener material suficiente para poder enunciar una hipótesis más o menos acertada. Después quedará sólo demostrarla empleando el método de inducción matemática.

Tenemos

$$S_1=1,\ S_2=4,\ S_3=9,\ S_4=16,\ S_5=25 \text{ y } S_6=36.$$

Ahora todo depende del espíritu de observación, de la capacidad de adivinar el resultado general a partir de los particulares.

Pensamos que en nuestro caso salta a la vista que

$$S_1=1^2,\quad S_2=2^2,\quad S_3=3^2 \text{ y } S_4=4^2.$$

Sobre esta base podemos suponer que

$$S_n=n^2.$$

Demostremos que esta hipótesis es justa.

1°. Siendo $n=1$, la suma consta de un sumando igual a 1. La expresión $n^2$ también es igual a 1 si $n=1$. O sea, la hipótesis se cumple para $n=1$.

2°. Supongamos que la hipótesis es válida para $n=k$, es decir, que $S_k=k^2$. Demostremos que también debe ser válida para $n=k+1$, o sea, que

$$S_{k+1}=(k+1)^2.$$

En efecto,

$$S_{k+1}=S_k+(2k+1).$$

Pero $S_k=k^2$ de modo que

$$S_{k+1}=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

como queríamos demostrar.

*Respuesta.* $S_n=n^2$.

**Problema 1.** Determínese $u_n$ si se sabe que $u_1=1$ y que

$$u_k=u_{k-1}+3$$

para todo número natural $k > 1$.

Sugerencia. $u_1 = 3 \cdot 1 - 2$, $u_2 = 3 \cdot 2 - 2$.

**Problema 2.** Hállese la suma

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}.$$

Sugerencia. $S_1 = 2 - 1$, $S_2 = 2^2 - 1$, $S_3 = 2^3 - 1$.

**Ejemplo 3.** Demuéstrese que la suma de los $n$ primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solución. Este problema difiere de los anteriores pues la hipótesis viene dada y no hay que elaborarla. Sólo es necesario demostrar su validez.

Indiquemos por $S_n$ la suma buscada:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

1°. Para $n = 1$ la hipótesis es válida.

2°. Sea

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Demostremos que

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Hemos resuelto el problema.

**Ejemplo 4.** Demuéstrese que la suma de los cuadrados de los $n$ primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución. Sea $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

1°. $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2°. Supongamos que

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Entonces

$$S_2(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

y definitivamente

$$S_2(n+1)=\frac{(n+1)\,[(n+1)+1]\,[2(n+1)+1]}{6}.$$

**Ejemplo 5.** Demuéstrese que

$$S_n=1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. 1°. Salta a la vista que para $n=1$ la hipótesis es válida ya que $(-1)^0=1$.

2°. Sea

$$S_k=1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

Demostremos que

$$S_{k+1}=1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2=$$
$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1}=S_k+(-1)^k(k+1)^2=$$
$$=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2,=$$
$$=(-1)^k\left[(k+1)-\frac{k}{2}\right](k+1)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

**Problema 3.** Demuéstrese que

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

**Problema 4.** Demuéstrese que la suma de los cubos de los $n$ primeros números naturales es igual a $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

**Problema 5.** Demuéstrese que

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad(x\neq 1).$$

**Ejemplo 6.** Demuéstrese que

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Solución. 1°. $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}.$

2°. Si

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\,n=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3},$$

se tiene

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\,n+n\,(n+1)=$$
$$=\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}+n\,(n+1)=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}.$$

El resultado del ejemplo 6 puede ser deducido también de los resultados de los ejemplos 3 y 4 si nos fijamos en que

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\,n=$$
$$=1\,(1+1)+2\,(2+1)+3\,(3+1)+\ldots$$
$$\ldots+(n-1)\,[(n-1)+1]=$$
$$=[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+[1+2\ldots+(n-1)].$$

**Problema 6.** Demuéstrese que

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\,(n+1)\,(n+2)=$$
$$=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}.$$

**Problema 7.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

**Problema 8.** Demuéstrese que

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\,(2n+1)}=\frac{n\,(n+1)}{2\,(2n+1)}.$$

**Problema 9.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\,(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

**Problema 10.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\,(4n+1)}=\frac{1}{4n+1}.$$

**Problema 11.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{a\,(a+1)}+\frac{1}{(a+1)\,(a+2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(a+n-1)\,(a+n)}=\frac{n}{a\,(a+n)}.$$

**Ejemplo 7.** Demuéstrese que si $v_0 = 2$ y $v_1 = 3$ y si

$$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$$

para todo número natural $k$, se tiene

$$v_n = 2^n + 1.$$

Solución. 1°. Para $n = 0$ y para $n = 1$ la proposición es válida por hipótesis.

2°. Supongamos que

$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \text{ y que } v_k = 2^k + 1.$$

Entonces

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

**Problema 12.** Demuéstrese que si

$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} \text{ y } u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

y si

$$u_k = (\alpha + \beta)\, u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2}$$

para todo número natural $k > 2$, se tiene

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}.$$

**Ejemplo 8.** El producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se indica por $n!$ (se lee $n$ factorial). Conviene memorizar que $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ y que $5! = 120$.

Calcúlese

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!.$$

Solución.

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1,$$
$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5,$$
$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23,$$
$$S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119.$$

Analizando estos resultados podemos persuadirnos de que

$$S_1 = 2! - 1,\ S_2 = 3! - 1,\ S_3 = 4! - 1 \text{ y } S_4 = 5! - 1.$$

Por eso, podemos enunciar la siguiente hipótesis

$$S_n=(n+1)!-1.$$

Comprobémosla.

1°. Para $n=1$ la hipótesis es válida pues

$$S_1=1\cdot 1!=2!-1.$$

2°. Sea

$$S_k=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+k\cdot k!=(k+1)!-1.$$

Demostremos que

$$S_{k+1}=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+k\cdot k!+$$
$$+(k+1)(k+1)!=(k+2)!-1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+(k+1)(k+1)!=\\&=[(k+1)!-1]+(k+1)(k+1)!=\\&=(k+1)![1+(k+1)]-1=\\&=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1.\end{aligned}$$

**Problema 13.** Demuéstrese la identidad

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

**Ejemplo 9.** Sea

$$\alpha+\beta=m,\quad \alpha\beta=a,\quad A_2=m-\frac{a}{m-1},$$

$$A_3=m-\cfrac{a}{m-\cfrac{a}{m-1}},\quad A_4=m-\cfrac{a}{m-\cfrac{a}{m-\cfrac{a}{m-1}}},\ \text{etc.},$$

o sea,

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k}\quad (m\neq 1;\ \alpha\neq\beta)$$

para $k>1$. Demuéstrese que

$$A_n=\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}. \qquad (1)$$

Solución. 1°. Demostremos primero que la fórmula (1) es válida para $n=2$. Por hipótesis,

$$A_2=m-\frac{a}{m-1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1}=$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}.$$

La fórmula (1) da

$$A_2=\frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}$$

o, simplificando la fracción en $\alpha-\beta$,

$$A_2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}$$

como queríamos demostrar.

2°. Supongamos que la fórmula (1) es válida para $n=k$, o sea, que

$$A_k=\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}. \qquad (1)$$

Demostremos que, entonces, también debe ser válida para $n=k+1$, o sea, que

$$A_{k+1}=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

En efecto,

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k}, \quad \text{es decir,} \quad A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{A_k}.$$

Aplicando la igualdad (2), encontramos

$$A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta[\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}=$$
$$=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

como queríamos demostrar.

**Problema 14.** Simplifíquese el polinomio

$$1 \quad \frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

*Respuesta.*

$$(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

**Ejemplo 10.** Demuéstrese que toda suma de un número entero de rublos, mayor que 7, se puede pagar en billetes de 3 y de 5 rublos.

Solución. 1°. La proposición es válida para la suma de 8 rublos (ya que 8 rublos = 3 rublos + 5 rublos).

2° Supongamos que la proposición es válida para una suma de $k$ rublos, donde $k$ es un número entero mayor o igual a 8.

Se pueden presentar dos casos: 1) la suma de $k$ rublos se puede pagar en billetes de 3 rublos y 2) para pagar la suma de $k$ rublos se precisa al menos un billete de 5 rublos.

En el primer caso habrá no menos de tres billetes de 3 rublos ya que $k > 8$. Para pagar la suma de $k+1$ rublos bastará sustituir tres billetes de 3 rublos por dos billetes de 5 rublos.

En el segundo caso para pagar la suma de $k+1$ rublos sustituimos un billete de 5 rublos por dos billetes de 3 rublos.

**Ejemplo 11.** Demuéstrese que la suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 9.

Solución. 1°. La suma $1^3+2^3+3^3$ es divisible por 9, o sea, la proposición es válida si el primero de los tres números sucesivos es el 1.

2°. Supongamos que la suma $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$, donde $k$ es un número natural, es divisible por 9. La suma

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=$$
$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=$$
$$=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3)$$

también será divisible por 9 pues consta de dos sumandos divisibles cada uno por 9.

**Problema 15.** Demuéstrese que la suma

$$A_n = 11^{n+2}+12^{2n+1}$$

es divisible por 133 cualquiera que sea el número entero $n \geqslant 0$.

**Ejemplo 22.** Entre los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$ se escogen al azar $n+1$ números. Demuéstrese que entre los

últimos habrá al menos dos números divisibles uno por otro.

Solución[1]. 1°. Para el caso de dos números 1 y 2 la proposición es válida.

2°. Supongamos que hemos logrado escoger $n+1$ números entre los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$ ($n \geqslant 2$) de modo que ninguno sea divisible por otro. Para abreviar indicaremos este conjunto de números por $M_{n+1}$. Demostremos que, entonces, también se puede escoger $n$ números entre los $2n-2$ números $1, 2, \ldots, 2n-2$ de modo que ninguno sea divisible por otro.

Se pueden presentar cuatro casos:

1) $M_{n+1}$ no contiene el número $2n-1$ ni el número $2n$,

2) $M_{n+1}$ contiene el número $2n-1$ y no contiene el número $2n$,

3) $M_{n+1}$ contiene el número $2n$ y no contiene el número $2n-1$ y

4) $M_{n+1}$ contiene ambos números $2n-1$ y $2n$.

Caso 1. Eliminemos de $M_{n+1}$ cualquier número. Quedarán $n$ números todos no superiores a $2n-2$; ninguno será divisible por otro.

Caso 2. Eliminemos de $M_{n+1}$ el número $2n-1$. Quedarán $n$ números todos no superiores a $2n-2$; ninguno de estos $n$ números será divisible por otro.

Caso 3. Eliminando de $M_{n+1}$ el número $2n$, obtenemos el mismo resultado.

Caso 4. Observemos, ante todo, que $M_{n+1}$ no contiene el número $n$ pues, de lo contrario, habría en $M_{n+1}$ dos números, $2n$ y $n$, divisible uno de ellos por el otro.

Eliminemos de $M_{n+1}$ ambos números $2n-1$ y $2n$. Quedará un conjunto de $n-1$ números que indicaremos con $M_{n-1}$. Agreguemos a $M_{n-1}$ el número $n$. Obtendremos así $n$ números con la particularidad de que ninguno pasa de $2n-2$. Resta demostrar que entre estos $n$ números no hay ninguno divisible por otro.

Como quiera que en $M_{n+1}$ no había dos números divisibles uno por otro, tampoco habrá números de este tipo en $M_{n-1}$. Sólo queda por demostrar que tampoco aparecen

[1] Esta solución ha sido propuesta por *M. Fridman*.

números de esta índole al agregar el número $n$ al conjunto $M_{n-1}$.

Para ello es suficiente probar que 1) ninguno de los números que componen $M_{n-1}$ es divisible por $n$ y que 2) el número $n$ no es divisible por ninguno de los números que componen $M_{n-1}$.

La primera proposición se deduce de que $M_{n-1}$ no contiene números superiores a $2n-2$.

La segunda, de que el número $2n$ no es divisible por ninguno de los números que componen $M_{n-1}$.

Por consiguiente, si aceptamos que la proposición no es válida en el caso de los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, tampoco será válida para los $2(n-1)$ números $1, 2, \ldots, 2n-2$. O sea, si la proposición es válida para los $2(n-1)$ números $1, 2, \ldots, 2n-2$, también será válida para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$.

De aquí y de 1° se infiere que nuestra proposición es válida para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$ cualquiera que sea el número natural $n$.

Este problema admite la siguiente solución sencilla. Escojamos entre los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$ un conjunto cualquiera de $n+1$ números e indiquémoslo con $M_{n+1}$.

Dividamos todo número *par* que figura en $M_{n+1}$ por una potencia del 2 de modo que el cociente sea impar. Indiquemos con $M'_{n+1}$ el conjunto de estos cocientes y de todos los números *impares* que figuran en $M_{n+1}$. El conjunto $M'_{n+1}$ contiene $n+1$ números impares todos menores que $2n$.

Pero sólo hay $n$ números impares positivos menores que $2n$ y, por eso, en $M'_{n+1}$ habrá al menos dos números iguales. Sean ambos iguales a $k$.

Este resultado significa que $M_{n+1}$ contenía dos números $2^s k$ y $2^t k$ (uno de los números $s$ o $t$ puede ser igual a cero). Pero uno de estos dos números $2^s k$ ó $2^t k$ es divisible por el otro.

**Problema 16** [1]**.** Demuéstrese que $n$ rectas distintas trazadas por un mismo punto de un plano lo dividen en $2n$ partes.

---

[1] El problema 16 y el ejemplo 13 vinculados a temas geométricos, han sido, sin embargo, incluidos en este parágrafo porque, de hecho, son de carácter aritmético.

**Ejemplo 13.** Demuéstrese: $n$ planos que pasan por un mismo punto, sin que contengan nunca tres una recta común, dividen el espacio en $A_n = n(n-1)+2$ partes.

Solución. 1°. Un plano divide el espacio en dos partes y, por otro lado, $A_1 = 2$ de modo que la proposición se cumple para $n=1$.

2°. Supongamos que la proposición es válida para $n=k$, o sea, que $k$ planos dividen el espacio en $k(k-1)+2$ partes. Demostremos que, entonces, $k+1$ planos lo dividen en $k(k+1)+2$ partes.

En efecto, sea $P$ el $(k+1)$-ésimo plano. Corta cada uno de los $k$ planos primeros según rectas y de esta forma el plano $P$ queda dividido en partes mediante $k$ rectas distintas que pasan por un mismo punto. En virtud del resultado del problema 16, el plano $P$ estará dividido en $2k$ partes representando cada una un ángulo plano de vértice en el punto dado.

Los $k$ planos primeros dividen el espacio en ángulos poliedros. Algunos de ellos son divididos por el plano $P$ en dos partes.

La faceta común de dos de estas partes es una porción del plano $P$ comprendida entre dos rayos, intersecciones de este plano y determinadas facetas del ángulo poliedro, o sea, es uno de los $2k$ ángulos planos en que está dividido el plano $P$.

De aquí se deduce que no pasa de $2k$ el número de ángulos poliedros divididos en dos partes por el plano $P$.

Por otro lado, cada una de las $2k$ partes, en que los $k$ primeros primeros planos dividen $P$, es la faceta común de dos ángulos poliedros y, por consiguiente, divide en dos partes el ángulo poliedro formado por los $k$ primeros planos.

De aquí se deduce que no es menor que $2k$ el número de ángulos poliedros divididos en dos partes por el plano $P$.

Es decir, el plano $P$ divide en dos partes exactamente $2k$ porciones del espacio formadas por los $k$ planos primeros. Luego, si $k$ planos dividen el espacio en $k(k-1)+2$ partes, $k+1$ planos lo dividen en

$$[k(k-1)+2]+2k = k(k+1)+2$$

partes. Hemos demostrado la proposición.

## § 2
## PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS Y ALGEBRAICOS

**Ejemplo 14.** Demuéstrese la identidad

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Solución. 1°. La identidad es válida para $n=0$ ya que

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

2°. Supongamos que es válida para $n=k$, o sea, que

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^k\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Entonces, también es válida para $n=k+1$. En efecto,

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^k\alpha \cos 2^{k+1}\alpha =$$
$$= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\operatorname{sen}\alpha}.$$

**Ejemplo 15.** Demuéstrese que $A_n = \cos n\theta$, si se sabe que $A_1 = \cos\theta$ y $A_2 = \cos 2\theta$ y que

$$A_k = 2\cos\theta\, A_{k-1} - A_{k-2}$$

para todo $k > 2$.

Solución. 1°. La proposición es válida para $n=1$ y para $n=2$.

2°. Sea

$$A_{k-2} = \cos(k-2)\theta \text{ y } A_{k-1} = \cos(k-1)\theta.$$

Entonces

$$A_k = 2\cos\theta\cos(k-1)\theta - \cos(k-2)\theta = \cos k\theta.$$

**Ejemplo 16.** Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{nx}{2}.$$

Solución. 1°. La proposición es válida para $n=1$.
2°. Sea

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\ldots+\operatorname{sen} kx=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}.$$

Entonces

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\ldots+\operatorname{sen} kx+\operatorname{sen}(k+1)x=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}+\operatorname{sen}(k+1)x=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}+2\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x$$

ya que

$$2\cos\frac{k+1}{2}x\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x-\operatorname{sen}\frac{kx}{2}.$$

**Problema 17.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

**Problema 18.** Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x+3\operatorname{sen} 3x+\ldots+n\operatorname{sen} nx=$$

$$=\frac{(n+1)\operatorname{sen} nx-n\operatorname{sen}(n+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}},$$

**Problema 19.** Demuéstrese que

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=$$

$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

**Problema 20.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=$$
$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x \quad (x\neq m\pi).$$

**Problema 21.** Demuéstrese que

$$\operatorname{arc}\operatorname{ctg}3+\operatorname{arc}\operatorname{ctg}5+\ldots+\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(2n+1)=$$
$$=\operatorname{arc}\operatorname{tg}2+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{3}{2}+\ldots+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arc}\operatorname{tg}1.$$

**Ejemplo 17.** Demuéstrese que

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right).$$

Solución. 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$1+i=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

2°. Sea

$$(1+i)^k=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right).$$

Entonces

$$(1+i)^{k+1}=2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right)\times$$
$$\times 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2^{\frac{k+1}{2}}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{4}\right].$$

**Problema 22.** Demuéstrese que

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-k\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right).$$

**Ejemplo 18.** Demuéstrese el teorema:

Si por efecto de un número finito de operaciones racionales (adición, sustracción, multiplicación y división) aplicadas a los números complejos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtiene un número $u$, por efecto de estas mismas operaciones apli-

cadas a los números complejos conjugados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ se obtiene el número $\bar{u}$ conjugado de $u$.

Solución. 1°. Demostremos, ante todo, que la proposición se cumple para cada una de las cuatro operaciones aplicadas a dos números complejos. Sean

$$x_1 = a + bi \text{ y } x_2 = c + di.$$

Entonces

$$x_1 + x_2 = (a + c) + (b + d)\, i = u \text{ y}$$
$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)\, i = \bar{u}.$$

Similarmente se demuestra la proposición para las operaciones de sustracción, de multiplicación y de división.

2°. Supongamos ahora que se ha formado una expresión racional con los números complejos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es sabido que para calcular esta expresión hay que realizar sucesivamente una serie de pasos empleando en cada uno una de las cuatro operaciones y siempre con dos números complejos, con la particularidad de que estos pasos pueden ser numerados.

Sea, por ejemplo,

$$u = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3}.$$

Para calcular $u$ basta realizar los siguientes pasos

| | |
|---|---|
| 1) $x_1 x_2 = u_1$, | 4) $u_3 - x_3 = u_4$, |
| 2) $x_3 x_4 = u_2$, | 5) $u_1 + u_2 = u_5$, |
| 3) $x_1 + x_2 = u_3$, | 6) $u_5 : u_4 = u$. |

Supongamos que la proposición es válida para todas las expresiones que requieren a lo sumo $k$ «pasos» para su cálculo. La palabra «paso» significa aquí que se realiza la adición, la sustracción, la multiplicación o la división de dos números complejos. Demostremos que, entonces, la proposición es también válida para las expresiones que requieren $k+1$ «pasos».

En efecto, el último, $(k+1)$-ésimo, «paso» se realiza con dos números $u_i$ y $u_j$ que se calculan efectuando $k$ «pasos» a lo sumo.

Si sustituimos los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por sus conjugados, los números $u_i$ y $u_j$ se convertirán en sus conju-

gados $\overline{u}_i$ y $\overline{u}_j$ y, por eso, el resultado del $(k+1)$-ésimo «paso» efectuado con estos últimos, o sea, el número $u$, se convertirá en el número conjugado $\overline{u}$.

**Problema 23.** Demuéstrese que

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx,$$

para todo $n$ natural.

## § 3
## DEMOSTRACIÓN DE DESIGUALDADES

**Ejemplo 19.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

para todo número natural $n > 1$.

Solución. Indiquemos por $S_n$ el primer miembro de la desigualdad.

1° $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ y, por consiguiente, la desigualdad se cumple para $n = 2$.

2°. Sea $S_k > \frac{13}{24}$ para cierto $k$. Demostremos que, entonces, también $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Tenemos

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \text{ y}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Comparando $S_k$ y $S_{k+1}$, vemos que

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

o sea,

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

El segundo miembro de la última igualdad es positivo cualquiera que sea el número natural $k$. Por eso, $S_{k+1} > S_k$. Pero $S_k > \frac{13}{24}$ de modo que tambien $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

**Problema 24.** Hállese el error en el razonamiento que sigue.

Proposición. La desigualdad

$$2^n > 2n + 1$$

es válida para todo número natural $n$.

Demostración. Supongamos que la desigualdad se cumple para $n = k$, donde $k$ es un número natural:

$$2^k > 2k + 1. \qquad (1)$$

Demostremos que, entonces, también se cumplirá para $n = k + 1$, o sea, que

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1. \qquad (2)$$

En efecto, $2^k$ es no menor que 2 cualquiera que sea el número natural $k$. Agreguemos $2^k$ al primer miembro de la desigualdad (1) y 2 al segundo. Obtendremos la desigualdad justa

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2,$$

o sea,

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1.$$

Hemos demostrado la proposición.

**Problema 25.** ¿Para qué valores naturales de $n$ se cumple la desigualdad

$$2^n > 2n + 1?$$

**Ejemplo 20.** ¿Para qué valores naturales de $n$ se cumple la desigualdad

$$2^n > n^2?$$

Solución.

Para $n = 1$ la desigualdad es válida ya que $2^1 > 1^2$.
Para $n = 2$ la desigualdad es falsa ya que $2^2 = 2^2$
Para $n = 3$ la desigualdad es falsa ya que $2^3 < 3^2$.
Para $n = 4$ la desigualdad es falsa ya que $2^4 = 4^2$.
Para $n = 5$ la desigualdad es válida ya que $2^5 > 5^2$.
Para $n = 6$ la desigualdad es válida ya que $2^6 > 6^2$.

Por lo visto, la desigualdad es válida para $n = 1$ y para todo $n > 4$. Demostrémoslo.

1°. Para $n = 5$ la desigualdad es válida.

2°. Sea

$$2^k > k^2, \qquad (1)$$

donde $k$ es un número natural mayor que 4.

Demostremos que

$$2^{k+1} > (k+1)^2. \qquad (2)$$

Sabemos que $2^k > 2k+1$ para $k > 4$ (problema 25). Por eso, agregando $2^k$ al primer miembro de la desigualdad (1) y $2k+1$ al segundo, obtenemos la desigualdad (2) que, por consiguiente, es válida.

*Respuesta.* $2^n > n^2$ para $n=1$ y para $n > 4$.

**Ejemplo 21.** Demuéstrese que

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha,$$

donde $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ y $n$ es un número natural mayor que 1.

Solución. 1°. La desigualdad es válida para $n=2$ pues $\alpha^2 > 0$.

2°. Supongamos que la desigualdad se cumple para $n=k$, o sea, que

$$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha, \qquad (1)$$

donde $k$ es un número natural. Demostremos que, entonces, la desigualdad también se cumple para $n=k+1$, o sea, que

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha. \qquad (2)$$

En efecto, por hipótesis, se tiene $1+\alpha > 0$ de modo que es válida la desigualdad

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha) \qquad (3)$$

que se obtiene multiplicando por $1+\alpha$ ambos miembros de la desigualdad (1).

La desigualdad (3) se puede expresar así:

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.$$

Desechando el sumando positivo $k\alpha^2$ en el segundo miembro de la última desigualdad, obtenemos la desigualdad (2) que, por consiguiente, es válida.

**Problema 26.** Demuéstrese que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

para todo número natural $n > 1$.

**Problema 27.** Demuéstrese que

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

para todo número natural $n > 1$.

**Ejemplo 22.** Demuéstrese que

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n, \tag{1}$$

donde $a+b > 0$, $a \neq b$ y $n$ es un número natural mayor que 1.

Solución. 1°. Para $n=2$ la desigualdad (1) da

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2. \tag{2}$$

Puesto que $a \neq b$, se cumple la desigualdad

$$(a-b)^2 > 0. \tag{3}$$

Agregando $(a+b)^2$ a ambos miembros de la desigualdad (3), obtenemos la desigualdad (2).

Con esto queda demostrado que la desigualdad (1) se cumple para $n=2$.

2°. Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para $n=k$, o sea, que

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a+b)^k, \tag{4}$$

donde $k$ es un número natural.

Demostremos que, entonces, la desigualdad (1) también se cumple para $n=k+1$, o sea, que

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a+b)^{k+1}. \tag{5}$$

Multipliquemos por $a+b$ ambos miembros de la desigualdad (4). Puesto que, por hipótesis se tiene $a+b > 0$, obtendremos la siguiente desigualdad justa

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) > (a+b)^{k+1}. \tag{6}$$

Para demostrar la validez de la desigualdad (5) basta probar que

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) \tag{7}$$

o, lo que es lo mismo, que

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k. \tag{8}$$

La desigualdad (8) equivale a la desigualdad

$$(a^k-b^k)(a-b)>0. \qquad (9)$$

Si $a>b$, tenemos $a^k>b^k$ y el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números positivos. Si $a<b$, tenemos $a^k<b^k$ y el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números negativos. En ambos casos la desigualdad (9) se cumple.

Con esto queda demostrado que la validez de la desigualdad (1) para $n=k$ implica su validez para $n=k+1$.

**Ejemplo 23.** Demuéstrese que cualquiera que sea $x>0$ y cualquiera que sea el número natural $n$ se cumple la desigualdad

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1. \qquad (1)$$

Solución. 1º. a) Para $n=1$ la desigualdad (1) da

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \qquad (2)$$

La desigualdad (2) se desprende de la desigualdad evidente

$$(x-1)^2\geqslant 0.$$

b) Para $n=2$ la desiqualdad (1) da

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 3. \qquad (3)$$

Puesto que la desigualdad (2) se cumple para todo $x>0$, subsiste al sustituir $x$ por $x^2$, o sea,

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2.$$

Agregando 1 a ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos la desigualdad (3).

2º. Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para $n=k$, o sea, que

$$x^k+x^{k-2}+\ldots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1, \qquad (4)$$

donde $k$ es un número natural. Demostremos que, entonces, la desigualdad (1) tambien se cumple para $n=k+2$,

o sea, que

$$x^{k+2}+x^{k}+x^{k-2}+\ldots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^{k}}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3. \quad (5)$$

Introduciendo $x^{k+2}$ en la desigualdad (2) en lugar de $x$, obtenemos

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2. \quad (6)$$

Sumando miembro por miembro las desigualdades (4) y (6), obtenemos la desigualdad (5).

Resumamos.

En los puntos a) y b) de 1° hemos demostrado la desigualdad (1) para $n=1$ y para $n=2$.

En el punto 2° hemos demostrado que, siendo válida la desigualdad (1) para $n=k$, también lo es para $n=k+2$. En otras palabras, el punto 2° permite pasar de $n=k$ a $n=k+2$.

Los resultados de los puntos 1° a) y 2° permiten afirmar que la desigualdad (1) se cumple para cualquier número *impar* $n$. Similarmente, los resultados de los puntos 1°b) y 2° permiten afirmar que la desigualdad (1) se cumple para cualquier número *par* $n$. En conjunto, podemos afirmar que la desigualdad (1) se cumple para *todo* número natural $n$.

**Ejemplo 24.** Demuéstrese el teorema: La media geométrica de varios números positivos no pasa de la media aritmética de los mismos, es decir, siendo $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$ unos números positivos, se tiene

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \quad (1)$$

Solución. 1°. Para $n=2$ la desigualdad (1) da

$$\sqrt{a_1 a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \quad (2)$$

Es fácil obtener esta desiguadad a partir de esta otra

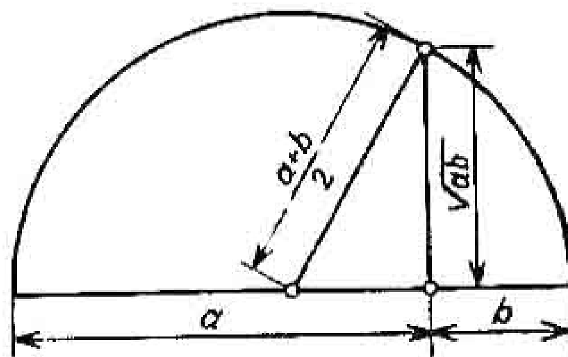
$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0,$$

válida cualesquiera que sean los números positivos $a_1$ y $a_2$.

La desigualdad (2) admite una interpretación geométrica sencilla. Tomemos sucesivamente en una recta $AB$

los segmentos $a_1$ y $a_2$. Construyamos la circunferencia cuyo diámetro es la suma de estos segmentos. Entonces, $\frac{a_1+a_2}{2}$ es el radio de est circunferencia y $\sqrt{a_1a_2}$ es a mitad de la cuerda perpe dicular al diámetro en el punto común de los segmentos $a_1$ y $a_2$ (véase la figura); de aquí se deduce la desigualdad (2).

2°. Supongamos que la desigualdad (1) se cumple para $n=k$.




Demostremos que, entonces, también se cumple para $n=2k$. En efecto,

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{2k}}{2k}.$$

Puesto que hemos demostrado ya la desigualdad (1) para $n=2$, podemos afirmar ahora que se cumple para $n=4$, 8, 16, etc., o sea, para $n=2^s$, dondt $s$ es un número natural.

3°. Para demostrar que la desigualdad (1) se cumple cualquiera que sea el número natural $n$, probemos que, si se cumple para $n=k$, también se cumple para $n=k-1$.

Sean, pues, $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ unos números positivos. Sea $\lambda$ un número positivo (por ahora indefinido). Entonces

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+\lambda}{k}.$$

Determinemos $\lambda$ de modo que

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+\lambda}{k} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}}{k-1},$$

o sea, pongamos

$$\lambda = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}}{k-1}.$$

Tenemos

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1}(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})}{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}}{k-1},$$

es decir,

$$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_{k-1}}{k-1}.$$

Sea ahora $m$ un número natural cualquiera. Si $m=2^s$, la desigualdad se cumple en virtud de 2°. Si $m \neq 2^s$, determinemos el número $s$ de modo que $m$ sea menor que $2^s$; entonces, basándonos en 2° y 3°, podemos afirmar que la desigualdad se cumple para $n=m$.

## § 4
## DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS TEOREMAS DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

Teorema 1. *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de sus términos y del duplo de todos los productos de sus términos tomados dos a dos, o sea,*

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+ \\ +2(a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_{n-1}a_n). \qquad (1)$$

1°. Para $n=2$ la fórmula (1) se demuestra mediante el cálculo directo.

2°. Supongamos que la fórmula (1) es válida para $n=k-1$, o sea, que

$$(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})^2 = a_1^2+a_2^2+\dots+a_{k-1}^2+2S,$$

donde $S$ es la suma de todos productos de los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ tomados dos a dos. Demostremos que

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2+a_k^2+2S_1,$$

donde $S_1$ es la suma de todos los productos de los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ tomados dos a dos, o sea,

$$S_1=S+(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})\,a_k.$$

En efecto,

$$(a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k)^2=[(a_1+\ldots+a_{k-1})+a_k]^2=$$
$$=(a_1+\ldots+a_{k-1})^2+2\,(a_1+\ldots+a_{k-1})\,a_k+a_k=$$
$$=a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2+2S+2\,(a_1+\ldots+a_{k-1})a_k+a_k^2=$$
$$=a_1^2+a_2^2+\ldots a_k^2+2S_1.$$

Teorema 2. *El término n-ésimo de una progresión aritmética se determina según la fórmula*

$$a_n=a_1+d\,(n-1), \qquad (1)$$

*donde $a_1$ es el primer término de la progresión y $d$ es la razón de la misma.*

1°. La fórmula (1) es válida para $n=1$.

2°. Supongamos que la fórmula (1) es válida para $n=k$, o sea, que

$$a_k=a_1+d\,(k-1).$$

Entonces

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+d\,(k-1)+d=a_1+dk$$

de modo que la fórmula (1) también se cumple para $n=k+1$.

Teorema 3. *El término n-ésimo de una progresión geométrica se determina según la fórmula*

$$a_n=a_1q^{n-1}, \qquad (1)$$

*donde $a_1$ es el primer término de la progresión y $q$ es la razón de la misma.*

1°. La fórmula (1) es válida para $n=1$.

2°. Sea

$$a_k=a_1q^{k-1}.$$

Entonces

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k.$$

Teorema 4. *El número de permutaciones de m elementos se determina según la fórmula*

$$P_m = m!. \qquad (1)$$

1°. Observemos, ante todo, que $P_1 = 1$ de modo que la fórmula (1) es válida para $m = 1$.

2°. Sea $P_k = k!$ Demostremos que

$$P_{k+1} = (k+1)!.$$

Entre los $k+1$ elementos dados $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ escojamos los $k$ primeros formando con ellos todas las permutaciones posibles. Por hipótesis, habrá $k!$ permutaciones de este tipo.

Coloquemos en cada una de ellas el elemento $a_{k+1}$ delante del primer, del segundo, ..., del $k$-ésimo y detrás del $k$-ésimo elemento. Por esta vía obtenemos a partir de una permutación de $k$ elementos un total de $k+1$ permutaciones de $k+1$ elementos. En suma habrá

$$k!\,(k+1) = (k+1)!$$

permutaciones de $k+1$ alementos.

Es preciso demostrar ahora que

1) entre las $(k+1)!$ permutaciones no hay dos iguales y

2) hemos obtenido todas las permutaciones de $k+1$ elementos.

1) Supongamos que entre las $(k+1)!$ permutaciones hay dos iguales. Sean éstas $p_1$ y $p_2$. Supongamos que el elemento $a_{k+1}$ ocupa en la permutación $p_1$ la posición $s$-ésima a partir de la izquierda. También en $p_2$ el elemento $a_{k+1}$ ocupará la posición $s$-ésima a partir de la izquierda.

Eliminemos de $p_1$ y de $p_2$ el elemento $a_{k+1}$. Obtendremos dos permutaciones iguales, $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$, de $k$ elementos.

Así, pues, para obtener $p_1$ y $p_2$ hemos colocado el elemento $a_{k+1}$ *dos veces en la misma posición* y *en una misma permutación* de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Pero esto contradice la regla empleada para construir las permutaciones.

2) Supongamos que no hemos obtenido una permutación $p$ de $k+1$ elementos y que el elemento $a_{k+1}$ ocupa en $p$

la posición $s$-ésima a partir de la izquierda. Eliminemos de $p$ el elemento $a_{k+1}$. Obtendremos una permutación $\bar{p}$ formada por los $k$ elementos primeros. Es decir, para obtener $p$ basta tomar la permutación $\bar{p}$ y colocar en ella el elemento $a_{k+1}$ en la posición $s$-ésima a partir de la izquierda.

Es imposible que nos hayamos saltado la permutación $\bar{p}$ ya que *hemos tomado todas* las permutaciones de los $k$ elementos primeros. Es imposible que no hayamos colocado el elemento $a_{k+1}$ en la posición señalada pues lo hemos colocado en la primera, segunda, ..., $(k+1)$-ésima posición a partir de la izquierda.

Por lo tanto, *todas las permutaciones construidas son distintas y no hemos perdido ninguna permutación de* $k+1$ *elementos.*

De lo expuesto se deduce que

$$P_{k+1}=(k+1)!.$$

Teorema 5. *El número de variaciones de* $m$ *elementos tomados* $n$ *a* $n$ *se determina según la fórmula*

$$A_m^n=m(m-1)\dots(m-n+1). \qquad (1)$$

1°. Observemos, ante todo, que $A_m^1=m$ y, por consiguiente, la fórmula (1) es válida para $n=1$.

2°. Supongamos que

$$A_m^k=m(m-1)\dots(m-k+1),$$

donde $k<m$. Demostremos que

$$A_m^{k+1}=m(m-1)\dots(m-k).$$

Para obtener todas las variaciones de $m$ elementos tomados $k+1$ a $k+1$ basta tomar las variaciones de $m$ elementos tomados $k$ a $k$ y agregar al final de cada una de ellas uno de los $m-k$ elementos restantes. Es fácil persuadirse de que las variaciones de $m$ elementos tomados $k+1$ a $k+1$ obtenidos de este modo son *distintos* y de que, además, *cualquier variación de* $m$ *elementos tomados* $k+1$ a $k+1$ *figura entre esos.*

Por lo tanto,

$$A_m^{k+1}=A_m^k(m-k)=m(m-1)\dots(m-k).$$

Teorema 6. *El número de combinaciones de m elementos tomados n a n se determina según la fórmula*

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}. \qquad (1)$$

1°. Observemos, ante todo, que $C_m^1 = m$ y, por consiguiente, la fórmula (1) es válida para $n = 1$.

2°. Supongamos que

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k}$$

y demostremos que

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k(k+1)}.$$

Para obtener todas las combinaciones de $m$ elementos tomados $k+1$ a $k+1$ consideremos todas las combinaciones de $m$ elementos tomados $k$ a $k$ y agreguemos a cada una de ellas, como el $(k+1)$-ésimo elemento, uno de los $m-k$ elementos restantes.

Salta a la vista que de esta forma se obtendrán todas las combinaciones de $m$ elementos tomados $k+1$ a $k+1$ apareciendo cada una de ellas $k+1$ veces.

En efecto, la combinación $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ se obtendrá al agregar el elemento $a_1$ a la combinación $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$, al agregar el elemento $a_2$ a la combinación $a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$, etc., y, por último, al agregar el elemento $a_{k+1}$ a la combinación $a_1, a_2, \dots, a_k$. Por lo tanto,

$$C_m^{k+1} = C_m^k \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-k)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k(k+1)}.$$

Teorema 7. *Cualesquiera que sean los números a y b y el número natural n tiene lugar la fórmula*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots$$
$$\dots + C_n^s a^{n-s} b^s + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad (1)$$

(fórmula *del binomio de Newton*).

1°. Para $n = 1$ tenemos $a+b = a+b$ y, por consiguiente, la formula (1) es válida en este caso.

2°. Sea

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + b^k.$$

Entonces

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=$$
$$=(a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+b^k)(a+b)=$$
$$=a^{k+1}+(1+C_k^1)a^kb+(C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2+\ldots$$
$$\ldots+(C_k^s+C_k^{s+1})a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}.$$

Tomando en consideración que $C_k^s+C_k^{s+1}=C_{k+1}^{s+1}$, obtenemos

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+$$
$$+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\ldots+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\ldots+b^{k+1}.$$

# EPÍLOGO

*Yu. A. Gástev*

La inducción es el paso de lo particular a lo general la deducción, de lo general a lo particular. Es sabido el papel que desempeñan los procesos de síntesis de obrervaciones y experementos *aislados* (o sea, la inducción) en las ciencias empíricas. En cambio, las Matemáticas siempre se han considerado como un modelo clásico de aplicación de métodos puramente deductivos ya que siempre se sobreentendía, explícita o implícitamente, que todas las proposiciones matemáticas (salvo los axiomas, proposiciones de partida) *se demuestran*, mientras que las aplicaciones concretas de estas proposiciones *se infieren* de las demostraciones, válidas en el caso general, (deducción).

Pero leemos: «La inducción se emplea ampliamente en las Matemáticas, pero hay que hacerlo con entendimiento» (página 9) o «¿Cómo debe emplearse la inducción en las Matemáticas para llegar siempre a conclusiones justas?» [1] (página 8). ¿Qué significa esto? ¿No querrá decir que entre los métodos matemáticos existen «correctos» o infalibles (deductivos) y métodos «poco seguros» (inductivos) que a veces, y especialmente en manos inexpertas (o, como dice el autor, aplicados con «ligereza»), fallan? Si esto fuese así, ¿dónde está el criterio de seguridad de estos métodos «inductivos»? ¿Cómo recuperar la seguridad en el carácter irremisiblemente obligatorio de las conclusiones matemáticas? ¿O se trata de una situación sin salida y la validez de los razonamientos matemáticos es de la misma naturaleza que las síntesis experimentales de las ciencias empíricas y, por lo tanto, no estaría de más «comprobar» una vez más un hecho demostrado (como a menudo se recomienda a los escolares que «comprueben» las operaciones aritméticas realizadas o la solución de una ecuación hallada siguiendo una fórmula general)?

La realidad es distinta. *La inducción* (o sea, la sugerencia de una idea o una hipótesis) sin duda *desempeña en las Matemáticas* un papel importante, pero *puramente eurístico*: permite *adivinar* cuál *debe ser, según todas las apariencias*, la solución. Pero *las proposiciones matemáticas se demuestran* siempre *deductivamente*. Ningún resultado matemático puede considerarse justo, válido, si no ha sido deducido de las proposiciones de partida.

[1] Esta forma de enfocar la «inducción en las Matemáticas» es ya casi tradicional en los textos escolares, incluso, en los más modernos.

Pero, ¿y el «método de inducción matemática»? Lo que sucede es que la «inducción matemática» es un método *deductivo*. En efecto, consideremos con más detalle la estructura de los razonamientos matemáticos que *aparentan* ser un «paso de lo particular a lo general». Es fácil persuadirse de que la llamada inducción matemática *no es*, de hecho, *inducción*: ¡es un método de razonamiento puramente deductivo! La demostración por este método consta de dos partes: 1) *la base*, o sea, la demostración (¡deductiva!) de la proposición para un número natural (o varios; por ejemplo, para 0 ó 1; en la pagina 13 esta parte se denomina «Teorema 1») y 2) *el paso inductivo* («Teorema 2») que consiste en la demostración (también deductiva) de la proposición *general*: para todo $n$ es cierto que la validez de la proposición para $n$ implica su validez para $n+1$. El «principio de inducción matemática» (página 12) es una proposición precisa (cuya evidencia intuitiva es aceptada por muchos matemáticos como indiscutible aunque a la hora de la exposición axiomática de la Aritmética figure como un axioma) que permite obtener, a partir de la base y del paso inductivo, una demostración puramente deductiva de la proposición para todos los números naturales $n$. Por consiguiente, no queda ningún caso que no haya sido «abarcado por las hipótesis» y al que aun debe hacerse extensiva (por inducción) la proposición; el teorema precisamente *se demuestra* para todos los números naturales: de la base demostrada, digamos, para el número 0) obtenemos aplicando el paso inductivo la demostración para el número 1 y después de la misma forma para 2, 3, ... De este modo el teorema puede ser argumentado para cualquier número natural [1].

En otras palabras, el nombre de «inducción matemática» se debe simplemente a que *se asocia* en nuestra consciencia con los razonamientos «inductivos» tradicionales (ya que la base efectivamente se demuestra sólo para un caso particular); pero el paso inductivo, a diferencia de los criterios, basados en la experiencia de verosimilitud de los razonamientos inductivos de las ciencias naturales (y sociales), es una proposición *general* que *no necesita de ninguna hipótesis particular* y se demuestra según los rigurosos canones de los razonamientos deductivos. Es por eso que la «inducción» matemática se denomina también «completa» o «perfecta» ya que (a diferencia de la inducción corriente, «imperfecta», que no garantiza *el conocimiento completo*) es un método deductivo («de 100% de seguridad») de demostración.

Es decir, *la inducción en tanto que método de demostración no se emplea en las Matemáticas* [2]; pero esto no excluye en modo alguno, por supuesto, la amplia aplicación en ellas del método deductivo de «inducción matemática».

---

[1] Acerca de los problemas que se plantean al argumentar de esta forma el método, véase la literatura indicada más adelante.

[2] Hemos mencionado ya de pasada el papel fecundo que desempeña la inducción «corriente» («incompleta») en la formación de hipótesis matemáticas que conducen al *descubrimiento* de nuevos hechos; de esto y de la relación entre la inducción «corriente» y el método de inducción matemática se trata con más detalle en el libro «Las Matemáticas y los razonamientos verosímiles» de *G. Polya*, volumen I (especialmente cap. 7).

Entendiendo así este término nos podemos, claro está, permitir la libertad de emplear frases como «inducción en la Geometría»[1] o «inducción en las Matemáticas». Pero siempre debe tenerse presente que la primera expresión, hablando con rigor, tiene un sentido totalmente distinto del que tiene la expresión voluminosa (¡pero precisa!) «aplicación del método deductivo de inducción matemática a la demostración de teoremas de contenido geométrico» y que la segunda expresión, a despecho de los criterios gramaticales, no es lo mismo que la «inducción matemática»; este último término debe comprenderse *en conjunto* y no como «inducción en las Matemáticas».

El método de inducción matemática (en la forma expuesta en este libro) es un método de demostración de teoremas *aritméticos* o, más rigurosamente, de teoremas referentes a las propiedades generales de los números naturales (0, 1, 2, ...; a veces, como sucede en este libro, la sucesión natural se comienza con el 1, pero esto no es una cuestión de principio). Y para la Aritmética de los números naturales este método en cierto sentido (razonable y amplio) es el instrumento *universal* (y a veces único) de demostración.

Para que esta última afirmación no le parezca al lector exagerada debe tener el convencimiento de que la edificación axiomática (deductiva) de la Aritmética se basa en la definición, *por inducción matemática*, de las operaciones con los números naturales (por ejemplo, para definir la adición se define —base de la inducción— la adición del 1 ó del 0 y después —paso inductivo— la adición de un número natural cualquiera se reduce a la adición del número precedente). Por eso, es evidente que para «llegar» a las propiedades generales de los números naturales relacionadas, digamos, con las operaciones de adición o de multiplicación debemos usar (si queremos argumentar axiomáticamente estas propiedades) la misma «escalera» (cuyo «escalón» inferior es la propiedad correspondiente enunciada para el número natural mínimo) que empleamos para «ascender» al concepto general que nos interesa; hablando figuralmente, no hay otra forma de «agarrarse» a la demostración necesaria. Y así ocurre con la demostración de todas las proposiciones aritméticas. Y si esto no se ve en el curso escolar de la Aritmética o del Álgebra es porque ese curso (con mucha razón) se basa no tanto en el método axiomático como en el experimento y la intuición[2]). Al fin y al cabo, incluso el lector más meticuloso y crítico se conforma a menudo con saber, digamos, que la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición *se puede* demostrar y no exige la demostración *misma*. (Pero esta seguridad, aunque esté bien fundamentada, difiere de la demostración auténtica tanto como difiere, por ejemplo, una información periodís-

[1]) Este es el nombre que, para abreviar, han dado *L. I. Golovíná* e *I. M. Yaglom* a su libro (Editorial MIR, 1975) concebido como continuación natural del libro de I. S. Sominski.

[2]) Por otra parte, cuando en el curso escolar se demuestran propiedades generales de los números naturales sin emplear para ello la inducción, esto se debe a que se utilizan (a veces *implícitamente*) como hipótesis proposiciones que, para su fundamentación rigurosa, precisan la inducción (de la misma forma que el empleo del postulado de las paralelas en la Geometría euclídea se puede «camuflar» tomando en su lugar uno de sus corolarios).

tica de lo que sabe auténticamente el testigo; además, esta analogía va muy lejos.) Por eso, en el curso escolar el método de inducción matemática aparece mucho más tarde que las propiedades, intuitivamente claras y fácilmente asimilables, de las operaciones aritméticas; por ejemplo, en relación con la fórmula del binomio de Newton de la que no puede decirse que su validez «salta a la vista».

Otras ramas de las Matemáticas necesitan del método de inducción matemática en la misma medida en que emplean la base aritmética. Esta necesidad tiene dos aspectos. Ante todo, muchas ramas matemáticas se edifican directamente sobre la base aritmética de los números naturales (digamos, la teoría de los números racionales que conduce, a su vez, a la teoría de los números reales); en cambio, otras pueden ser *interpretadas* en términos aritméticos (por ejemplo, todo resultado de la Geometría euclídea puede ser expresado en el lenguaje «de coordenadas» de los números reales). En estos casos, las proposiciones de carácter geométrico, digamos, se pueden demostrar mediante la inducción matemática empleando esta interpretación aritmética. Se puede decir que el carácter geométrico o de otra índole de estas proposiciones no es más substancial para la demostración que, por ejemplo, la naturaleza de los objetos en el problema relativo a la adición de tres y cinco pepinos o de tres y cinco barcos. (El lector podrá encontrar ejemplos semejantes en este libro.)

Pero sucede también que la base de la inducción se demuestra por métodos esencialmente no aritméticos [1]). Sin embargo, también en este caso representa el paso inductivo (aun cuando se base en axiomas geométricos u otros) *una proposición general sobre los números naturales* puesto que se trata de la validez de una propiedad para todo número natural $n$ [2]).

Es decir, la inducción matemática según los números naturales es un método de demostración de teoremas aritméticos «por su forma», pero quizá geométricos o de cualquier otra índole (mecánicos, por ejemplo) «por su contenido».

Señalemos también que el método, tan fructífero en las demostraciones que siguen el proceso de construcción de la sucesión natural 0, 1, 2, ..., puede ser extendido también a procesos de índole muy distinta. Por ejemplo, en los cálculos de la Lógica matemática que operan con fórmulas («proposiciones») obtenidas de «fórmulas elementales» («proposiciones elementales») de tipo $A$, $B$, $C$, ... mediante, digamos, los signos & («y»), $\vee$ («o»), $\supset$ («si ..., entonces ...») y $\neg$ («no»), las propiedades generales de las fórmulas se demuestran empleando la llamada *inducción por construcción*: se demuestra que 1) esta propiedad es válida para cualquier fórmula elemental (base) y que 2) si esta propiedad es válida para las fórmulas $X$ e $Y$, también lo es para las fórmulas $(X \& Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \supset Y)$ y $\neg X$ (paso inductivo); de aquí se deduce que la proposición sonsiderada es válida para todas las fórmulas de este tipo. La analogía que aquí se observa con

[1]) Véase, por ejemplo, el libro ya mencionado «Inducción en la Geometría» de *L. I. Golovina* e *I. M. Yaglom*.

[2]) Es decir, el propio paso «de $n$ a $n+1$» se demuestra para todo número natural $n$.

la inducción matemática expuesta en este libro es tan palpable que salta a la vista incluso de un lector inexperto.

En general, toda construcción matemática (o lógica) consistente en el paso de uno o varios objetos iniciales a objetos nuevos mediante una o varias operaciones de paso, puede ser considerada como el fundamento del método correspondiente «inductivo» (que, como hemos visto, es puramente deductivo) de definición o de demostración. (A propósito, el papel relativamente supeditado que desempeña la inducción matemática en el Análisis matemático se debe precisamente a que los números reales, a diferencia de los naturales, no son resultado de una construcción neta que se desarrolla según esta forma, de modo que distintas «inducciones según los números reales» están muy lejos de tener el carácter universal que tiene la inducción matemática en la Aritmética y su modificación en la Lógica matemática.)

En cuanto a las preguntas de carácter *general* matemático o lógico que puedan surgirle al lector, lo remitimos a la literatura especial [1]). En cambio, el presente libro sirve muy bien para dar a conocer las aplicaciones *concretas* del método de inducción matemática elemental.

---

[1]) Véase, por ejemplo, *Л. Генкин*, О математической индукции, М., Физматгиз, 1962 (*L. Guenkin*, Sobre la inducción matemática); *И. В. Арнольд*, Теоретическая арифметика, М., Учпедгиз, 1939 (*I. V. Arnold*, Aritmética teórica); *S. C. Kleene*, Introduction to metamathematics, Amsterdam, New York and Toronto, 1952 (S. C. Kleene, Introducción a las Metamatemáticas, § 7, 13, 21, 38 y otros); «Математическая индукция» Философская энциклопедия, М., 1964, т. 3 («Inducción matemática», Enciclopedia filosófica, v. 3).

# SOLUCIONES [1]

**1.** Hipótesis
$$u_n = 3n - 2.$$
1°. La hipótesis es válida para $n = 1$.
2°. Sea
$$u_k = 3k - 2.$$
Entonces
$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2.$$
**2.** Hipótesis
$$S_n = 2^n - 1.$$
1°. La hipótesis es válida para $n = 1$.
2°. Sea
$$S_k = 2^k - 1.$$
Entonces
$$S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$
(Podíamos también formar directamente la diferencia $2S_n - S_n$ y mostrar que es igual a $2^n - 1$.)

**3.** 1°. La proposición es válida para $n = 1$.
2°. Sea
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$
Entonces
$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$
$$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

---

[1] Sólo indicamos los números de los *problemas*. La solución de los *ejemplos* se da en el texto.

4. 1ª. La proposición es válida para $n=1$.
2ª. Sea

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

Entonces

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

5. 1ª. La proposición es válida para $n=1$.
2ª. Sea

$$1+x+x^2+\ldots+x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Entonces

$$1+x+x^2+\ldots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

6. 1ª. La proposición es válida para $n=1$.
2ª. Sea

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Entonces

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

7. 1ª. La proposición es válida para $n=1$.
2ª. Sea

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

8. 1ª. La proposición es válida para $n=1$.
2ª. Sea

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Entonces

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=(k+1)\frac{k(2k+3)+2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

**9.** 1°. La proposición es válida para $n=1$.
2°. Sea

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

**10.** 1°. La proposición es válida para $n=1$.
2°. Sea

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

**11.** 1°. La proposición es válida para $n=1$.
2°. Sea

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}.$$

Entonces

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

**12.** 1°. La proposición es válida para $n=1$ y para $n=2$.
2°. Sean

$$u_{k-2}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta} \quad \text{y} \quad u_{k-1}=\frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}.$$

Entonces

$$u_{k}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.$$

**13.** 1°. Siendo $n=0$, tenemos

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^{2}},$$

o sea, la proposición es válida.
2°. Sea

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^{2}}+\frac{4}{1+x^{4}}+\ldots+\frac{2^{k}}{1+x^{2^{k}}}=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Entonces

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^{2}}+\frac{4}{1+x^{4}}+\ldots+\frac{2^{k}}{1+x^{2^{k}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$
$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

**14.** Para $n=1$ tenemos

$$1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1!}.$$

Para $n=2$ tenemos

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

Para $n=3$ tenemos

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=$$
$$=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}.$$

Esto sugiere la hipótesis

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

1°. La hipótesis es válida para $n=1$.
2°. Sea

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^k\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}=$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}.$$

Entonces

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}+$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!}=$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}+$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{(k+1)!}=$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]=$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}.$$

15. 1°. La proposición es válida para $n=0$.
2°. Supongamos que la proposición es válida para $n=k$, o sea, que

$$A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$$

es divisible por 133. Entonces

$$A_{k+1}=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}=$$
$$=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11A_k+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Hemos representado $A_{k+1}$ como la suma de dos términos divisibles cada uno por 133. Luego, $A_{k+1}$ es divisible por 133.

16. 1°. Salta a la vista que la proposición es válida para $n=1$.
2°. Supongamos que la proposición es válida para $n=k$, o sea, que $k$ rectas dividen el plano en $2k$ ángulos; la recta $(k+1)$-ésima divide en dos partes dos ángulos verticales a la vez, es decir, aumenta

en 2 el número de partes en que está dividido el plano. Por eso, $k+1$ rectas dividen el plano en $2k+2=2(k+1)$ partes.

**17.** 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\cos x.$$

2°. Sea

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx=\frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx+\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x+\left(\operatorname{sen}\frac{2k+3}{2}x-\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{2k+3}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

**18.** 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=\operatorname{sen}x.$$

2°. Sea

$$\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}2x+\ldots+k\operatorname{sen}kx=$$

$$=\frac{(k+1)\operatorname{sen}kx-k\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

Entonces

$$\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x+\ldots+k\operatorname{sen} kx+(k+1)\operatorname{sen}(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\operatorname{sen} kx-k\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}+(k+1)\operatorname{sen}(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\operatorname{sen} kx-k\operatorname{sen}(k+1)x+2(k+1)\operatorname{sen}(k+1)x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x+(k+1)\operatorname{sen} kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x+(k+1)\operatorname{sen} kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{(k+1)[\operatorname{sen}(k+2)x+\operatorname{sen} kx]}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x-(k+1)\operatorname{sen}(k+2)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

**19.** 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x(1-\cos x)}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=\cos x.$$

2°. Sea

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

Entonces

$$\cos x+2\cos 2x+\ldots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}+(k+1)\cos(k+1)x=$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{(k+1)[\cos(k+2)x+\cos kx]+1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

**20.** 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2°. Sea

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x.$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}}-\operatorname{ctg}x=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k+1}}-\operatorname{ctg}x.$$

**21.** 1°. Tenemos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}2-\operatorname{arc\,tg}1)=\frac{2-1}{1+2\cdot1}=\frac{1}{3}.$$

Por eso,

$$\operatorname{arc\,tg} 2 - \operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,ctg} 3,$$

o sea, la proposición es válida para $n=1$.

2°. Mostremos, ante todo, que

$$\operatorname{arc\,ctg}(2k+3) = \operatorname{arc\,tg} \frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tg} 1. \qquad (1)$$

En efecto

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tg} 1\right) = \frac{\frac{k+2}{k+1} - 1}{1 + \frac{k+2}{k+1} \cdot 1} = \frac{1}{2k+3},$$

o sea,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2k+3} = \operatorname{arc\,ctg}(2k+3) = \operatorname{arc\,tg} \frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tg} 1.$$

Supongamos que la proposición es válida para $n=k$, es decir, que $\operatorname{arc\,ctg} 3 + \operatorname{arc\,ctg} 5 + \ldots + \operatorname{arc\,ctg}(2k+1) =$

$$= \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arc\,tg} \frac{k+1}{k} - k \operatorname{arc\,tg} 1. \qquad (2)$$

Demostremos que, entonces, también es válida para $n=k+1$, o sea, que

$$\operatorname{arc\,ctg} 3 + \operatorname{arc\,ctg} 5 + \ldots + \operatorname{arc\,ctg}(2k+1) + \operatorname{arc\,ctg}(2k+3) =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{arc\,tg} \frac{k+2}{k+1} - (k+1) \operatorname{arc\,tg} 1. \qquad (3)$$

En efecto, sumando miembro por miembro las igualdades (1) y (2), obtenemos la igualdad (3).

22. 1°. La proposición es válida para $n=1$ ya que

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right).$$

2°. Sea

$$(\sqrt{3} - i)^k = 2^k \left(\cos\frac{k\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\right).$$

Entonces

$$(\sqrt{3} - i)^{k+1} = 2^k \left(\cos\frac{k\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\right) 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

23. 1°. La proposición es válida para $n=1$.

2°. Sea

$$(\cos x+i \operatorname{sen} x)^k=\cos kx+i \operatorname{sen} kx.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(\cos x+i \operatorname{sen} x)^{k+1}&=(\cos kx+i \operatorname{sen} kx)(\cos x+i \operatorname{sen} x)=\\&=(\cos kx \cos x-\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} x)+\\&+i(\cos kx \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} kx \cos x)=\\&=\cos(k+1)x+i \operatorname{sen}(k+1)x.\end{aligned}$$

24. Es errónea la última frase: "Hemos demostrado la proposición". En verdad, hemos demostrado sólo que la desigualdad

$$2^n>2n+1$$

es válida para $n=k+1$ si lo es para $n=k$, donde $k$ es un número natural cualquiera.

De aquí no se deduce todavía que la desigualdad se cumple *al menos para un* valor de $n$ y, con más razón, para un número natural *n cualquiera*.

En una palabra, el error consiste en que hemos demostrado sólo el teorema 2 y no hemos considerado el teorema 1, o sea no hemos creado la base para la inducción.

25. Salta a la vista que 3 es el menor número natural $n$ para el cual se cumple la desigualdad $2^n>2n+1$.

Puesto que la validez de esta desigualdad para $n=k$ implica su validez para $n=k+1$ (problema 24), podemos afirmar que la desigualdad se cumple para cualquier número natural $n \geqslant 3$.

26. 1°. La desigualdad se cumple para $n=2$ ya que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}.$$

2°. Sea

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad (1)$$

Demostremos que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}. \qquad (2)$$

Para todo $k \geqslant 0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \qquad (3)$$

En efecto, la desigualdad (3) equivale a esta otra

$$1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1$$

que se obtiene multiplicando ambos miembros de (3) por $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$. Sumando miembro por miembro las desigualdades (1) y (3), obtenemos la desigualdad (2).

**27.** 1°. Para $n=2$ la desigualdad da $\frac{16}{3}<6$ y, por consiguiente, se cumple.

2°. Sea

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

donde $k\geqslant 2$. Es fácil comprobar que

$$\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

para $k>0$. Por eso,

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

o sea,

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$

# ÍNDICE

